

Singuläre kubische Kurven und der Satz von den drei Spiegelungen

Edzard Salow

1. Der Satz von Menelaos und die Euler-Spiegelungen:

Eine kubische Kurve, kurz Kubik genannt, wird durch eine ganzrationale Gleichung $f(x; y) = 0$ vom Grad 3 bestimmt. Die zugehörige Kubik ist die Menge von Punkten $(x; y)$, für welche die Gleichung $f(x; y) = 0$ erfüllt ist, in geometrisch sinnvoller Weise ergänzt um sogenannte 'unendlich ferne Punkte'. Eine Kubik heißt singulär, wenn es auf ihr 'singuläre Punkte' gibt, deren Bedeutung unten erklärt wird. Die einfachsten kubischen Kurven setzen sich aus drei Geraden zusammen, wenn auch dabei die Bezeichnung 'Kurve' für die Vereinigungsmenge dreier Geraden befremden mag. Die Abbildung 1 zeigt die rot gezeichnete Kubik zur Gleichung $f(x, y) = y \cdot (y - x) \cdot (x - 4) = 0$ mit drei Geraden

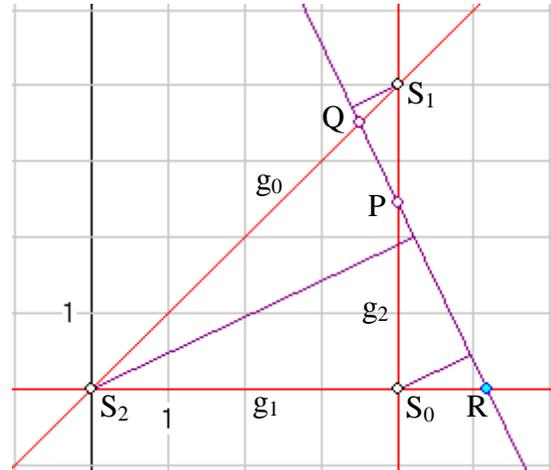


Abb. 1

g_0, g_1 und g_2 und den Schnittpunkten S_0, S_1 und S_2 , außerdem eine Sekante mit den Schnittpunkten P, Q und R und die dazu senkrechten Strecken ℓ_0, ℓ_1 und ℓ_2 durch S_0, S_1 und S_2 . Wenn im Folgenden der Term S_{i+1} oder g_{i+1} benutzt wird, dann bezeichnet er für $i = 2$ den Punkt S_0 bzw. die Gerade g_0 . Es wird also bei den Indizes modulo 3 gerechnet. S_{i-1} oder g_{i-1} bedeutet darum für $i = 0$ den Punkt S_2 bzw. die Gerade g_2 . Wir beschreiben die Lage eines Punktes P auf der Geraden $S_{i+1}S_{i+2} = g_i$ durch das 'signierte' Teilverhältnis

$$\vartheta(S_{i+1}, S_{i+2}, P) = \pm \frac{|S_{i+2}P|}{|S_{i+1}P|}. \text{ Dabei berücksichtigen wir die unterschiedliche Lage der}$$

Teilungspunkte P und R , indem wir bei der inneren Teilung wie im Fall von P und Q ein Plus-Zeichen benutzen und bei der äußeren Teilung wie im Fall von R ein Minus-Zeichen. Auf jeder Geraden denken wir uns genau einen 'unendlich fernen Punkt' hinzu, der die Menge der endlichen Punkte der Geraden in beiden Richtungen abschließt, so dass eine geschlossene Kurve entsteht.

Nach dem Strahlensatz ist bei der Lage in Abbildung 1 $\vartheta(S_0, S_1, P) = \frac{|S_1P|}{|S_0P|} = \frac{|\ell_1|}{|\ell_0|},$

$$\vartheta(S_1, S_2, Q) = \frac{|S_2Q|}{|S_1Q|} = \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} \text{ und } \vartheta(S_2, S_0, R) = -\frac{|S_0R|}{|S_2R|} = -\frac{|\ell_0|}{|\ell_2|}, \text{ also}$$

$$\vartheta(S_0, S_1, P) \cdot \vartheta(S_1, S_2, Q) \cdot \vartheta(S_2, S_0, R) = -\frac{|\ell_1|}{|\ell_0|} \cdot \frac{|\ell_2|}{|\ell_1|} \cdot \frac{|\ell_0|}{|\ell_2|} = -1.$$

Satz von Menelaos (ca. 70 bis ca. 140) : S_0, S_1 und S_2 seien paarweise verschiedene Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Wenn P bzw. Q bzw. R auf der Geraden $S_0 S_1$ bzw. $S_1 S_2$ bzw. $S_2 S_3$ liegt, dann sind P, Q und R genau dann kollinear, wenn

$$\vartheta(S_0, S_1, P) \cdot \vartheta(S_1, S_2, Q) \cdot \vartheta(S_2, S_0, R) = -1 \text{ ist.}$$

Dadurch, dass wir die Geraden um einen unendlich fernen Punkt ergänzen, haben auch Parallelen zu den drei Geraden der Kubik einen dritten Schnittpunkt. Das Teilverhältnis für die unendlich fernen Punkte ist -1.

Die Punkte S_0, S_1 und S_2 nennen wir 'singuläre' Punkte, die übrigen Punkte der Kubik nicht-singulär. Bei einem nicht-singulären Punkt P verstehen wir unter $\iota(P)$ die Nummer der Geraden, auf der er liegt.

Für P auf g_i schreiben wir statt $\vartheta(S_{i+1}, S_{i+2}, P)$ im Folgenden auch kürzer $\vartheta_i(P)$. Im Folgenden wird für andere Kubiken $\vartheta_\delta(P)$ auch mit $\delta \neq 1$ definiert.

Normierte Parameterdarstellung für drei Geraden mit drei nicht kollinearen Schnittpunkten :
Wir beschreiben die Gerade g_i durch S_{i+1} und S_{i+2} mit Hilfe eines Parameters u durch die Gleichung $\vec{x} = \vec{m}_i + u \cdot \vec{n}_i$, wobei \vec{m}_i der Ortsvektor des Mittelpunktes M_i der Strecke $S_{i+1} S_{i+2}$ ist und \vec{n}_i der Vektor $\overrightarrow{M_i S_{i+2}}$. Als Parameter des unendlich fernen Punkts benutzen wir das Symbol ∞ . (Da es auf jeder Geraden nur einen unendlich fernen Punkt gibt, unterscheiden wir hier nicht $-\infty$ und $+\infty$.)

Bei dieser Parameterdarstellung ist das signierte Teilverhältnis $\vartheta(S_{i+1}, S_{i+2}, P)$ auf jeder Geraden der Kubik durch $\frac{1-p}{1+p}$ gegeben, wenn p den Parameter von P bezeichnet. Im Fall des

Parameterwerts ∞ benutzt man die zusätzliche Rechenregel $\frac{1}{\infty} = 0$ und wendet sie auf

$$\frac{1-p}{1+p} = \frac{\frac{1}{p} - 1}{\frac{1}{p} + 1} \text{ an, so dass sich für } p = \infty \text{ das Teilverhältnis } -1 \text{ ergibt.}$$

Für die Zwecke der Kubiken in den folgenden Abschnitten verallgemeinern wir :

Definition :

1. $\mu_\delta(p) := \frac{\sqrt{\delta} - p}{\sqrt{\delta} + p}$ für $\delta > 0$
2. $\mu_0(p) := \frac{1}{p}$
3. $\mu_\delta(p) := \text{arc cot} \left(\frac{p}{\sqrt{-\delta}} \right)$ für $\delta < 0$

Für die Umkehrfunktion μ_δ^{-1} gilt:

1. $\mu_\delta^{-1}(q) = \sqrt{\delta} \cdot \frac{1-q}{1+q} = \sqrt{\delta} \cdot \mu_1(q)$ für $\delta > 0$
2. $\mu_0^{-1}(q) = \mu_0(q)$
3. $\mu_\delta^{-1}(q) = \sqrt{-\delta} \cdot \text{cot}(q)$ für $\delta < 0$

Wenn p bzw. q bzw. r der Parameterwert des Punktes P bzw. Q bzw. R ist, dann sind nach dem Satz von Menelaos die Punkte P, Q und R genau dann kollinear, wenn $\mu_1(p) \cdot \mu_1(q) \cdot \mu_1(r) = -1$ ist. Dies ist äquivalent mit

$$r = \mu_1 \left(\frac{-1}{\mu_1(p) \cdot \mu_1(q)} \right) = \mu_1 \left(-\frac{1+p}{1-p} \cdot \frac{1+q}{1-q} \right) = -\frac{p \cdot q + 1}{p+q}. \text{ Der Term } -\frac{p \cdot q + 1}{p+q} \text{ hat auch für}$$

Parameter p, q einen Sinn, wenn die zugehörigen Punkte auf derselben Geraden liegen. Für die Kubiken in den folgenden Abschnitten benötigen wir den allgemeineren Term $-\frac{p \cdot q + \delta}{p+q}$.

Er ergibt sich, wenn man die Gleichung $\mu_\delta(p) \cdot \mu_\delta(q) \cdot \mu_\delta(r) = -1$ mit $\delta > 0$ nach r auflöst. Für alle Werte von δ ist $-\frac{p \cdot q + \delta}{p+q} = r$ äquivalent mit $p \cdot q + q \cdot r + r \cdot p = -\delta$. Der Term $-\frac{p \cdot q + \delta}{p+q}$

wird im Folgenden auch für $\delta \leq 0$ eine Rolle spielen.

Definition : Für beliebiges $\delta \in \mathbb{R}$ sei die Funktion σ_δ definiert durch $\sigma_\delta(p, q) := -\frac{p \cdot q + \delta}{q+p}$ für

reelle Zahlen $q \neq -p$, $\sigma_\delta(p, -p) = \infty$, $\sigma_\delta(\infty, p) = \sigma_\delta(p, \infty) = -p$ und $\sigma_\delta(\infty, \infty) = \infty$. $\sigma_{\delta, p}$ sei die Funktion $q \rightarrow \sigma_\delta(p, q)$.

Satz 1:

1. σ_δ ist symmetrisch, d. h. $\sigma_\delta(p, q) = \sigma_\delta(q, p)$, und aus $\sigma_\delta(p, q) = r$ folgt $\sigma_\delta(p, r) = q$ für alle $p, q, r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

2. $\sigma_{\delta, p}$ ist involutorisch, d. h. $\sigma_{\delta, p}(\sigma_{\delta, p}(q)) = q$.

3. $\sigma_{\delta, a}(\sigma_{\delta, b}(\sigma_{\delta, c}(p))) = \sigma_{\delta, d}(p)$ mit $d = \frac{abc - \delta(a - b + c)}{ab + bc - ca - \delta} = \sigma_{\delta, b}(\sigma_{\delta, c}(a))$

4. $\sigma_\delta(p, q) = r$ ist äquivalent mit

1. $\mu_\delta(p) \cdot \mu_\delta(q) \cdot \mu_\delta(r) = -1$ falls $\delta > 0$

2. $\mu_\delta(p) + \mu_\delta(q) + \mu_\delta(r) = 0$ falls $\delta \leq 0$

5. Es sei $c = \sigma_\delta(z, a)$ und $d = \sigma_\delta(z, b)$. Dann ist $d = \sigma_{\delta, b}(\sigma_{\delta, c}(a))$ und es gilt:

1. $\frac{\mu_\delta(d)}{\mu_\delta(c)} = \frac{\mu_\delta(a)}{\mu_\delta(b)}$ falls $\delta > 0$

2. $\mu_\delta(d) - \mu_\delta(c) = \mu_\delta(a) - \mu_\delta(b)$ falls $\delta \leq 0$

6. $\sigma_\delta(-p, -q) = -\sigma_\delta(p, q)$, und für $\delta \neq 0$ ist $\sigma_\delta\left(\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{q}\right) = \sigma_\delta(p, q)$

7. $(q+p) \cdot (\sigma_{\delta, p}(q) + p) = p^2 - \delta$ und $\left(\frac{\delta}{q} + \frac{\delta}{p}\right) \cdot \left(\sigma_{\delta, p}(q) + \frac{\delta}{p}\right) = \left(\frac{\delta}{p}\right)^2 - \delta$

8. Die Gleichung $\sigma_{\delta, p}(q) = q$ hat genau für $p^2 \geq \delta$ Lösungen, nämlich $-p + \sqrt{p^2 - \delta}$ und $-p - \sqrt{p^2 - \delta}$.

Der Beweis ergibt sich durch Nachrechnen. Bei 4.2 wird das Additionstheorem für die

Kotangens-Funktion benutzt, also $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot(\alpha) \cdot \cot(\beta) \mp 1}{\cot(\beta) \pm \cot(\alpha)}$.

Die erste Gleichung von Aussage 6 ist ein Spezialfall der Gleichung

$\sigma_\delta(\sigma_\delta(a, p), \sigma_\delta(-a, q)) = -\sigma_\delta(p, q)$ für $a = \infty$.

Definition : S_0, S_1 und S_2 seien drei verschiedene nicht kollineare Punkte mit den Verbindungsgeraden g_2, g_0 und g_1 . $\Pi(p, i)$ sei der Punkt auf g_i mit dem Parameterwert p . Für nicht-singuläre Punkte $P = \Pi(p, i)$ und $Q = \Pi(q, j)$ sei dann $Q\sigma_p$ der Punkt $\Pi(\sigma_1(p, q), (-i - j) \bmod 3)$. Die Abbildung σ_p nennen wir 'Euler-Spiegelung an P'.

Für die Abbildungen von Punkten schreiben wir das Abbildungszeichen rechts an den Punkt, damit bei Hintereinanderschaltungen die Reihenfolge der Operationen mit der Leserichtung zusammenpasst. Durch $(-i - j) \bmod 3$ wird die Zahl $3n - i - j$ mit ganzzahligem n bezeichnet, die zwischen 0 und 2 liegt. Dies ist für verschiedene Werte von i und j die dritte Nummer unter den Zahlen 0, 1 und 2, denn z. B. $(-0 - 2) \bmod 3 = 1$. Für $i = j$ ist $(-i - j) \bmod 3 = i$. Durch die Rechnung modulo 3 wird erreicht, dass die Euler-Spiegelung an einem Punkt P auf der Geraden g_i die anderen beiden Geraden der Kubik vertauscht. Dabei sind P, Q und $Q\sigma_p$ nach dem Satz von Menelaos kollinear. Für die Nummern der Geraden, auf der P, Q und $Q\sigma_p$ liegen, gilt $\iota(P) + \iota(Q) + \iota(Q\sigma_p) = 0$. Die geometrische Bedeutung von σ_p für die Punkte von g_i wird in Satz 2 geklärt.

Zu $P = \Pi(p, i)$ bezeichnen wir den Punkt $\Pi(-p, i)$ mit \bar{P} . Das ist der Punkt auf der Geraden mit der Nummer i , der durch Punktspiegelung am Mittelpunkt M_i der beiden singulären Punkte auf dieser Geraden entsteht. Den Punkt $\Pi\left(\frac{1}{p}, i\right)$ bezeichnen wir mit \tilde{P} . Er ist das Bild von P bei Spiegelung an dem Kreis \mathcal{C}_i um M_i durch die beiden singulären Punkte S_{i+1} und S_{i+2} . Den Bildpunkt $\Pi\left(-\frac{1}{p}, i\right)$ von P bei der Euler-Spiegelung an M_i bezeichnen wir mit \hat{P} .

Satz 2: Die Euler-Spiegelungen zu der durch drei nicht kollineare Punkte S_0, S_1, S_2 bestimmten Kubik aus den Verbindungsgeraden g_2, g_0 und g_1 haben folgende Eigenschaften:

1. $Q\sigma_p = P\sigma_Q$, und aus $Q\sigma_p = R$ folgt $R\sigma_p = Q$ für alle nicht-singulären Punkte P, Q, R .
2. σ_p ist involutorisch, d. h. $Q\sigma_p\sigma_p = Q$ für alle nicht-singulären Punkte Q .
3. Die Hintereinanderschaltung $\sigma_A\sigma_B\sigma_C$ dreier Euler-Spiegelungen ist eine Euler-Spiegelung σ_D mit $D = A\sigma_C\sigma_B$, d. h. für alle nicht-singulären Punkte P ist $P\sigma_A\sigma_B\sigma_C = P\sigma_D$. (Satz von den drei Spiegelungen)
4. Die Punkte P, Q und $P\sigma_Q$ sind kollinear. $P\sigma_Q = R$ ist äquivalent mit:
 $\vartheta_1(P) \cdot \vartheta_1(Q) \cdot \vartheta_1(R) = -1$ und $\iota(P) + \iota(Q) + \iota(R) = 0 \bmod 3$.
5. Sei $C = A\sigma_Z$ und $D = B\sigma_Z$. Dann ist $D = A\sigma_C\sigma_B$ und es gilt: $\frac{\vartheta_1(D)}{\vartheta_1(C)} = \frac{\vartheta_1(A)}{\vartheta_1(B)}$.
6. $\overline{Q\sigma_p} = \overline{Q\sigma_{\bar{p}}}$ und $\tilde{Q\sigma_p} = Q\sigma_p$ für alle nicht-singulären Punkte P, Q .
7. Wenn Q und $P = \Pi(p, i)$ gemeinsam auf der Geraden $S_{i+1}S_{i+2}$ der Kubik liegen, dann gilt: Im Fall dass P nicht zwischen S_{i+1} und S_{i+2} liegt, entsteht $Q\sigma_p$ durch Spiegelung von Q an dem Kreis um \bar{P} mit dem Radius $\sqrt{p^2 - 1}$; andernfalls entsteht $Q\sigma_p$ durch

Spiegelung von \tilde{Q} an dem Kreis um \hat{P} mit dem Radius $\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 - 1}$. Diese Kreise schneiden den Kreis \mathcal{C}_1 senkrecht.

8. σ_p hat genau dann Fixpunkte, wenn P nicht zwischen zwei singulären Punkten liegt. In diesem Fall sind es zwei Fixpunkte, die symmetrisch zu \bar{P} im Abstand $\sqrt{p^2 - 1}$ liegen.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 1, bei 4. unter Verwendung des Satzes von Menelaos und bei 7. des Satzes von Pythagoras.

Bei der Aussage 5 von Satz 2 gibt $\frac{\vartheta_1(A)}{\vartheta_1(B)}$ für den Fall, dass A und B auf der Geraden $S_{i+1}S_{i+2}$

liegen, das Doppelverhältnis der Punkte S_{i+1}, S_{i+2}, A, B an. Es stimmt also mit dem Kehrwert des entsprechenden Doppelverhältnisses der Bilder bei der Eulerspiegelung an Z überein. Bemerkenswert ist bei Aussage 5, dass sie auch gilt, wenn A und B nicht auf der gleichen Geraden der Kubik liegen.

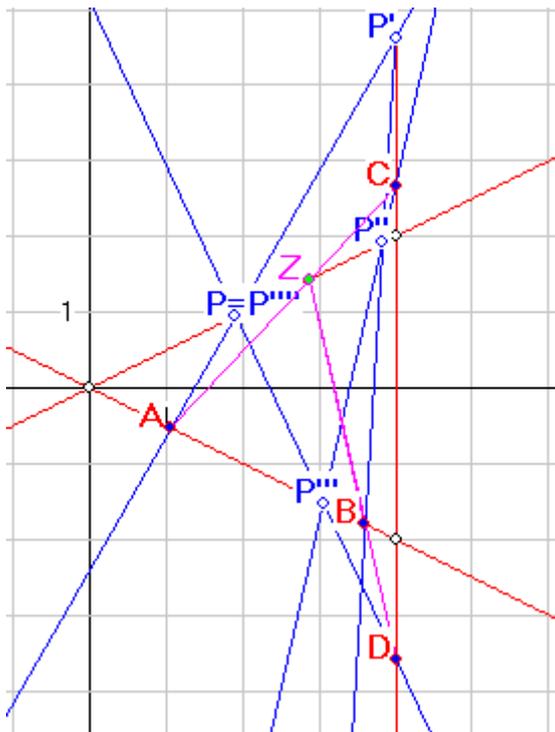


Abb. 2

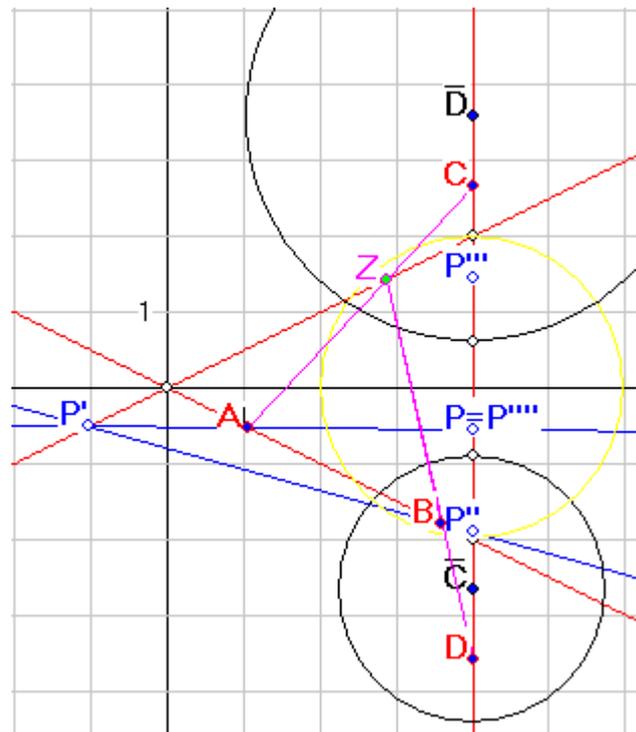


Abb. 3

Die Abbildungen 2 und 3 veranschaulichen den Satz von den drei Spiegelungen für zwei verschiedene Lagen des Punktes P . Es ist $P' = P\sigma_A$, $P'' = P\sigma_A\sigma_B$ und $P''' = P\sigma_A\sigma_B\sigma_C = P\sigma_D$. Die Geraden AC und BD schneiden sich in einem Punkt Z auf der rot gezeichneten Kubik. In Abbildung 2 ist keine der Geraden $PA, P'B, P''C$ und $P'''D$ eine der drei Geraden der Kubik. Darum spielen hier Kreisspiegelungen keine Rolle. Anders ist es in Abbildung 3, weil hier $P''C$ und $P'''D$ eine Gerade der Kubik ist

Die Tatsache, dass das Produkt dreier Euler-Spiegelungen wieder eine Euler-Spiegelung ist, folgt in Abbildung 2 aus dem Satz von Pappos-Pascal. Der griechische Mathematiker Pappos

(um 300 n. Chr.) hat diesen Satz für die Kubik aus drei Geraden aufgestellt und der französische Mathematiker und Philosoph Pascal (1623-1662) für die Kombination aus Kegelschnitt und Gerade. Er besagt: Wenn die Punkte P, A, Z, B, P'', P''', P eines Sechsecks auf einem Geradenpaar oder einem Kegelschnitt liegen, dann sind die Schnittpunkte P', C und D der gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks kollinear (vgl. Abb. 8). Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Eckpunkte des Sechsecks paarweise verschieden sind. Wenn Eckpunkte beim Kegelschnitt zusammenfallen, hat man als zugehörige Seitengerade die Tangente zu nehmen.

Der Satz von den drei Spiegelungen ist insbesondere von Bedeutung weil er es ermöglicht, auf der Menge der nicht-singulären Punkte der Kubik eine Addition einzuführen, so dass eine abelsche Gruppe entsteht. Man wählt dazu zunächst einen Punkt N aus, der das neutrale Element der Gruppe werden soll. Wir nehmen den Mittelpunkt N von S_1 und S_2 . Dann definieren wir für nicht-singuläre Punkte P und Q: $P + Q$ sei der Punkt R mit $\sigma_P \sigma_N \sigma_Q = \sigma_R$. Nach Satz 2 ist R der Punkt $P\sigma_Q\sigma_N$.

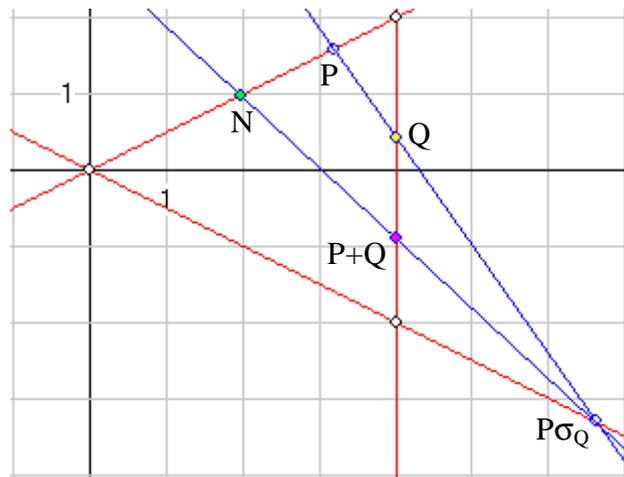


Abb.4

N ist dann Neutralelement, weil $\sigma_P \sigma_N \sigma_N = \sigma_P$ ist. Das Assoziativgesetz gilt für diese Addition, weil es für Hintereinanderschaltungen von Abbildungen gilt. Das inverse Element zu P ist der Punkt U, für den $\sigma_N \sigma_P \sigma_N = \sigma_U$ ist, denn dann folgt

$\sigma_P \sigma_N \sigma_U = \sigma_P \sigma_N \sigma_N \sigma_P \sigma_N = \sigma_N$. Die Gruppe ist abelsch, weil $\sigma_P \sigma_N \sigma_Q \sigma_P \sigma_N \sigma_Q = \sigma_R \sigma_R = \text{id}$ die identische Abbildung ist, woraus durch Multiplikation mit $\sigma_Q \sigma_N \sigma_P$ von rechts

$$\sigma_P \sigma_N \sigma_Q = \sigma_Q \sigma_N \sigma_P \text{ folgt.}$$

Für nicht-singuläre Punkte $P = \Pi(p, i)$ sei die Abbildung ζ definiert durch $\zeta(P) = (\mu_1(p), i)$.

$$\text{Dann ist } \zeta(P\sigma_Q) = (\mu_1(\sigma_1(p, q)), (-i - j) \bmod 3) = \left(\frac{-1}{\mu_1(p) \cdot \mu_1(q)}, (-i - j) \bmod 3 \right)$$

und

$$\zeta(P + Q) = \zeta(P\sigma_Q\sigma_N) = \left(\frac{\mu_1(p) \cdot \mu_1(q)}{\mu_1(0)}, (-0 + i + j) \bmod 3 \right) = (\mu_1(p) \cdot \mu_1(q), (i + j) \bmod 3).$$

Darum ist ζ ein Isomorphismus von der additiven Gruppe der nicht-singulären Punkte der Kubik auf das direkte Produkt $\mathbb{R}^* \times \mathbb{Z}_3$ der multiplikativen Gruppe \mathbb{R}^* der reellen Zahlen und der Gruppe \mathbb{Z}_3 der ganzen Zahlen modulo 3.

Abbildung 5 zeigt eine Kubik aus drei Geraden mit einem gemeinsamen Punkt S und einer Sekante mit den Schnittpunkten P, Q und R. Hier ist der Satz von Menelaos nicht anwendbar, es gibt aber ein Analogon dazu. Der orientierte Flächeninhalt des Dreiecks QSP beträgt

$0,5 \cdot |\overline{SP}| \cdot |\overline{SQ}| \cdot \sin(\angle PSQ)$. Entsprechendes gilt für die Dreiecke RSQ und PSR. In Abbildung 5 ist der orientierte Flächeninhalt von PSR ein anderes Vorzeichen als der von QSP und RSQ, da die Dreiecke entgegengesetzt orientiert sind und darum auch die zugehörigen Sinus-Werte

ein unterschiedliches Vorzeichen haben. Folglich ist

$$0,5 \cdot |\overline{SP}| \cdot |\overline{SQ}| \cdot \sin(\angle PSQ) + 0,5 \cdot |\overline{SQ}| \cdot |\overline{SR}| \cdot \sin(\angle QSR) + 0,5 \cdot |\overline{SR}| \cdot |\overline{SP}| \cdot \sin(\angle RSP) = 0, \text{ also}$$

$$\text{auch } \frac{\sin(\angle PSQ)}{|\overline{SR}|} + \frac{\sin(\angle QSR)}{|\overline{SP}|} + \frac{\sin(\angle RSP)}{|\overline{SQ}|} = 0.$$

Wenn wir die drei Geraden g_0, g_1 und g_2 in Richtung \overline{SP} bzw. \overline{SQ} bzw. \overline{SR} orientieren, ergibt sich

$$\frac{\sin(\angle g_0 g_1)}{|\overline{SR}|} + \frac{\sin(\angle g_1 g_2)}{|\overline{SP}|} + \frac{\sin(\angle g_2 g_0)}{|\overline{SQ}|} = 0.$$

Wenn eine der Geraden umorientiert wird, ändern sich bei zwei der Summanden die Vorzeichen, so dass die Gleichung falsch wird. Zum Ausgleich ersetzen wir die Abstände der Punkte von S durch signierte Abstände, bei denen die Abstände entsprechend der Orientierung der Geraden mit einem Vorzeichen versehen werden. Wir verwenden

dann die Bezeichnung $|\overline{SP}|^\pm$ statt $|\overline{SP}|$. Mit dieser

Bezeichnung definieren wir $\vartheta_0(P) := \frac{\sin(\angle g_{i+1} g_{i+2})}{|\overline{SP}|^\pm}$ für P auf g_i .

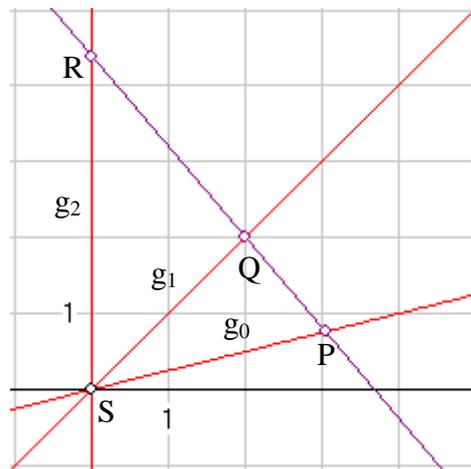


Abb.5

Analogon des Satzes von Menelaos für kopunktsame Geraden: g_0, g_1 und g_2 seien drei paarweise verschiedene orientierte Geraden mit einem gemeinsamen Punkt S. P bzw. Q bzw. R sei ein Punkt auf g_0 bzw. g_1 bzw. g_2 . Dann sind P, Q und R genau dann kollinear, wenn $\vartheta_0(P) + \vartheta_0(Q) + \vartheta_0(R) = 0$ ist.

Normierte Parameterdarstellung für drei verschiedene kopunktsame Geraden: Wir beschreiben die Gerade g_i mit Hilfe eines Parameters u durch die Gleichung $\vec{x} = \vec{s} + u \cdot \vec{n}_i$, wobei \vec{s} der Ortsvektor von S ist und \vec{n}_i der Ortsvektor eines Punktes N_i auf g_i ist, für den

$$|\overline{SN}_i|^\pm = \sin(\angle g_{i+1} g_{i+2}) \text{ ist.}$$

Durch diese Normierung wird erreicht, dass die Punkte P, Q und R genau dann kollinear sind, wenn für ihre zugehörigen Parameter p, q und r gilt: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$. Dies ist äquivalent mit

$$r = -\frac{p \cdot q}{p + q} = \sigma_0(p, q). \text{ Darum ist Satz 1 anwendbar und man kann die Euler-Spiegelungen wie}$$

bei den nicht kopunktsamen Geraden definieren. Zu $P = \Pi(p, i)$ sei auch hier $\bar{P} = \Pi(-p, i)$. \bar{P} ist das Bild von P bei der Punktspiegelung an S.

Satz 3: Die Euler-Spiegelungen zu der durch drei verschiedene Geraden g_1, g_2 und g_3 durch einen Punkt S bestimmten Kubik haben die Eigenschaften 1. bis 3. von Satz 2. Die Aussagen 4., 5., 6. und 7. übertragen sich mit folgenden Variationen:

4. Die Punkte P, Q und $P\sigma_Q$ sind kollinear. $P\sigma_Q = R$ ist äquivalent mit:

$$\vartheta_0(P) + \vartheta_0(Q) + \vartheta_0(R) = 0 \text{ und } \iota(P) + \iota(Q) + \iota(R) = 0 \pmod{3}.$$

5. Sei $C = A\sigma_Z$ und $D = B\sigma_Z$. Dann ist $D = A\sigma_C\sigma_B$ und es gilt:
 $\vartheta_0(D) - \vartheta_0(C) = \vartheta_0(A) - \vartheta_0(B)$.
6. $\overline{Q\sigma_p} = \overline{Q\sigma_{\bar{p}}}$
7. Wenn Q und $P = \Pi(p, i)$ gemeinsam auf der Geraden g_i der Kubik liegen, dann gilt:
 $Q\sigma_p$ entsteht durch Spiegelung von Q an dem Kreis um \bar{P} mit dem Radius $|p|$ durch S .
8. Sei $P = \Pi(p, i)$. σ_p hat genau einen nicht-singulären Fixpunkt, nämlich den Punkt auf der Geraden g_i , der von \bar{P} den gleichen Abstand hat wie S .

Der Beweis ergibt sich auch hier unmittelbar aus Satz 1.

Bei der Kubik mit kopunktalen Geraden wird die Rolle der Funktion $\mu_1(p) = \frac{1-p}{1+p}$, mit der

oben das signierte Teilverhältnis berechnet wurde, von $\mu_0(p) = \frac{1}{p}$ übernommen und die

Gleichung $\mu_1(p) \cdot \mu_1(q) \cdot \mu_1(r) = -1$ zur Kennzeichnung der Kollinearität dreier Punkte P, Q und R von $\mu_0(p) + \mu_0(q) + \mu_0(r) = 0$.

Wegen der Gültigkeit des Satzes von den drei Spiegelungen kann man auch hier für die Menge der nicht-singulären Punkte in gleicher Weise eine Addition einführen, so dass sich eine abelsche Gruppe ergibt. Als neutrales Element wählen wir den unendlich fernen Punkt auf der Geraden mit der Nummer 0. Durch $\zeta(P) = (\mu_0(p), i)$ wird dann ein Isomorphismus auf das direkte Produkt der additiven Gruppe der reellen Zahlen und \mathbb{Z}_3 definiert.

2. Kubiken aus einem Kegelschnitt und einer Geraden

Wie betrachten in diesem Abschnitt Kubiken in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit gleichen Einheitsabschnitten, die sich aus einem Kegelschnitt K mit einer Gleichung in der Form $y^2 = -m \cdot x^2 + n \cdot x$ mit $n \neq 0$ und einer Geraden $g : x = d$ mit $d \neq 0$ zusammensetzen.

Die Gleichung der Kubik ist dann $(y^2 + m \cdot x^2 - n \cdot x) \cdot (x - d) = 0$. Die Abbildung 6 zeigt ein Beispiel mit $m=1$, $n=2$ und $d=3$. Für $m > 0$ ergibt sich eine Ellipse, für $m = 0$ eine Parabel und für $m < 0$ eine Hyperbel. Die Überlegungen aus dem Abschnitt 1 lassen sich hier weitgehend übertragen mit dem Unterschied, dass die Kubik hier nur zwei statt drei Komponenten hat und darum stets zwei von drei kollinearen Punkten der Kubik auf der gleichen Komponente liegen.

Normierte Parameterdarstellung für den Kegelschnitt $y^2 = -m \cdot x^2 + n \cdot x$ mit $n \neq 0$ und die Gerade $x = d$ mit $d \neq 0$: Der ausgezeichnete Parameter für die Gerade g sei der y -Wert ihrer Punkte bzw. der Wert ∞ für den unendlich fernen Punkt auf g . Der zum Parameter p gehörige

Punkt des Kegelschnitts K sei der Schnittpunkt $\left(\frac{d^2 n}{p^2 + d^2 m}, \frac{-dnp}{p^2 + d^2 m} \right)$ der Geraden $y = -\frac{p}{d}x$

mit K falls $p^2 + d^2 m \neq 0$ ist. Der Parameter des Ursprungs $U = (0 ; 0)$ sei ∞ . Im Fall, dass $p = \pm d\sqrt{-m}$ ist, sei der zugehörige Punkt des Kegelschnitts der unendlich ferne Punkt auf der Geraden durch U und den Punkt $(d ; \mp d\sqrt{-m})$.

1. $\vartheta_\delta(P) = \frac{1}{\vartheta_\delta(P\sigma_U)}$ falls $\delta > 0$ ist,
2. $\vartheta_\delta(P) = -\vartheta_\delta(P\sigma_U)$ falls $\delta \leq 0$ ist.

Im Fall $\delta < 0$, der in Abbildung 6 dargestellt ist, entspricht die Geometrie nicht der im ersten Abschnitt, denn g und der Kegelschnitt haben keinen gemeinsamen Punkt. Zur Deutung der Winkelgröße $\vartheta_\delta(R) = \mu_\delta(r) = \text{arc cot} \left(\frac{r}{\sqrt{-\delta}} \right)$ führen wir den Maßpunkt $M(d + \sqrt{-\delta}; 0)$ ein.

Wenn $\mu_\delta(r)$ an der in Abbildung 6 gelb gezeichneten Parallelen zu g durch M abgetragen wird, verläuft die zweite Schenkelgerade durch den Punkt $R = \Pi(r, 0)$. Da hierbei die Winkelgrößen $\mu_\delta(r)$ und $\mu_\delta(r) + \pi$ die gleiche zweite Schenkelgerade liefern, identifizieren wir $\mu_\delta(r)$ und $\mu_\delta(r) + \pi$, rechnen also mit diesen Winkelgrößen 'modulo π ' statt 'modulo 2π ', so dass z. B. die Winkelgröße -60° mit 120° übereinstimmt.

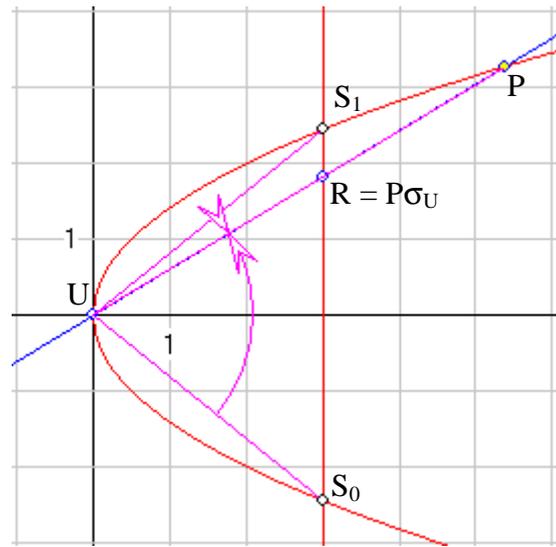


Abb.7

Der Fall, dass $\delta > 0$ ist, also g den Kegelschnitt K in den zwei verschiedenen Punkten $S_0(d; -\sqrt{\delta})$ und $S_1(d; \sqrt{\delta})$ schneidet, ist in Abbildung 7 für die Parabel $y^2 = 2x$ und die Gerade $g: x = 3$ dargestellt. In diesem Fall stimmt der zum Punkt $R = \Pi(r, 0)$ auf g gehörige Wert $\vartheta_\delta(R) = \mu_\delta(r)$ mit dem Teilverhältnis $\vartheta(S_0, S_1, R)$ überein. Für einen

Punkt P auf dem Kegelschnitt ist $\vartheta_\delta(P) = \frac{1}{\vartheta_\delta(P\sigma_U)} = \frac{1}{\vartheta(S_0, S_1, P\sigma_U)} = \pm \frac{|S_1 P \sigma_U|}{|S_0 P \sigma_U|}$. Dabei wird das Pluszeichen genau dann benutzt, wenn $P\sigma_U$ zwischen S_0 und S_1 liegt.

Man kann $\vartheta_\delta(P)$ für Punkte auf K mit Hilfe von Umfangswinkeln des Kegelschnitts in folgender Weise geometrisch deuten: Nach dem Sinussatz gilt

$$|S_0 P \sigma_U| = \frac{|US_0|}{\sin(\angle UP \sigma_U S_0)} \cdot \sin(\angle S_0 U P \sigma_U) \text{ und Entsprechendes mit } S_1 \text{ statt } S_0. \text{ Wegen}$$

$$\sin(\angle UP \sigma_U S_0) = \sin(\angle UP \sigma_U S_1) \text{ und } |US_0| = |US_1| \text{ folgt}$$

$$\vartheta_\delta(P) = \pm \frac{|S_1 P \sigma_U|}{|S_0 P \sigma_U|} = \pm \frac{\sin(\angle S_1 U P \sigma_U)}{\sin(\angle S_0 U P \sigma_U)} = \pm \frac{\sin(\angle S_1 U P)}{\sin(\angle S_0 U P)}.$$

Im Fall $\delta = 0$ ist $m \neq 0$ und $d = \frac{n}{m}$ (wegen $n \neq 0$). Dann haben K und g nur den Punkt

$S(d ; 0)$ gemeinsam. Für Punkte R auf g sei dann $\vartheta_\delta(R) = \frac{1}{|\text{SR}|^\pm}$, wobei $|\text{SR}|^\pm$ der signierte

Abstand entsprechend der Orientierung von g nach $+\infty$ ist. Für P auf K ist

$$\vartheta_\delta(P) = -\vartheta_\delta(P\sigma_U) = -\frac{\cot(\angle \text{SUP}\sigma_U)}{d} = \frac{\cot(\angle P\sigma_U \text{US})}{d} = \frac{\cot(\angle \text{PUS})}{d}.$$

Zu $P = \Pi(p, i)$ bezeichnen wir wieder den Punkt $\Pi(-p, i)$ mit \bar{P} und falls $\delta \neq 0$ den Punkt

$\Pi\left(\frac{\delta}{p}, i\right)$ mit \tilde{P} und $\Pi\left(-\frac{\delta}{p}, i\right)$ mit \hat{P} . \bar{P} entsteht durch Achsenspiegelung von P an der x -

Achse und \hat{P} durch Euler-Spiegelung am Punkt $\Pi(0,0) = (d ; 0)$. \mathcal{C} sei für $\delta \neq 0$ der Kreis um den Punkt $(d ; 0)$ mit dem Radius $\sqrt{|\delta|}$. Er geht für $\delta > 0$ durch die beiden singulären Punkte S_0 und S_1 und für $\delta < 0$ durch den Maßpunkt M . Wenn P auf g liegt, ist das Bild von P bei Spiegelung an dem Kreis \mathcal{C} für $\delta > 0$ durch \tilde{P} gegeben und für $\delta < 0$ durch \hat{P} . Wenn $\delta < 0$ und P auf g liegt, ist \tilde{P} der Punkt auf g , für den das Dreieck $PM\tilde{P}$ einen rechten Winkel bei M hat, wie man z. B. mit Hilfe des Höhensatzes von Euklid zeigt.

Satz 4: Die Euler-Spiegelungen zu der Kubik aus dem Kegelschnitt $K: y^2 = -m \cdot x^2 + n \cdot x$ mit $n \neq 0$ und der Geraden $g : x = d$ mit $d \neq 0$ haben folgende Eigenschaften

($\delta = -md^2 + nd$):

1. $Q\sigma_p = P\sigma_Q$, und aus $Q\sigma_p = R$ folgt $R\sigma_p = Q$ für alle nicht-singulären Punkte P, Q, R .
2. σ_p ist involutorisch.
3. Die Hintereinanderschaltung $\sigma_A\sigma_B\sigma_C$ dreier Euler-Spiegelungen ist eine Euler-Spiegelung σ_D mit $D = A\sigma_C\sigma_B$. (Satz von den drei Spiegelungen)
4. Die Punkte P, Q und $P\sigma_Q$ sind kollinear. $P\sigma_Q = R$ ist äquivalent mit :
 1. $\vartheta_\delta(P) \cdot \vartheta_\delta(Q) \cdot \vartheta_\delta(R) = -1$ und $\iota(P) + \iota(Q) + \iota(R) = 0 \pmod{2}$ falls $\delta > 0$
 2. $\vartheta_\delta(P) + \vartheta_\delta(Q) + \vartheta_\delta(R) = 0$ und $\iota(P) + \iota(Q) + \iota(R) = 0 \pmod{2}$ falls $\delta \leq 0$
5. Sei $C = A\sigma_Z$ und $D = B\sigma_Z$. Dann ist $D = A\sigma_C\sigma_B$ und es gilt:
 1. $\frac{\vartheta_\delta(D)}{\vartheta_\delta(C)} = \frac{\vartheta_\delta(A)}{\vartheta_\delta(B)}$ falls $\delta > 0$
 2. $\vartheta_\delta(D) - \vartheta_\delta(C) = \vartheta_\delta(A) - \vartheta_\delta(B)$ falls $\delta \leq 0$
6. $\overline{Q\sigma_p} = \overline{Q\sigma_{\bar{p}}}$, und falls $\delta \neq 0$ $\tilde{Q\sigma_p} = Q\sigma_p$ für alle nicht-singulären Punkte P, Q .
7. Wenn Q und $P = \Pi(p, 0)$ gemeinsam auf g liegen, dann gilt:
 1. Im Fall $\delta > 0$: Wenn P nicht zwischen S_0 und S_1 liegt, entsteht $Q\sigma_p$ durch Spiegelung von Q an dem Kreis um \bar{P} mit dem Radius $\sqrt{p^2 - \delta}$; andernfalls entsteht $Q\sigma_p$ durch Spiegelung von \tilde{Q} an dem Kreis um \hat{P} mit dem Radius $\sqrt{\left(\frac{\delta}{p}\right)^2 - \delta}$. Diese Kreise schneiden den Kreis \mathcal{C} senkrecht.
 2. Im Fall $\delta \leq 0$: $Q\sigma_p$ entsteht durch Spiegelung von Q an dem Kreis um \bar{P} mit dem Radius $\sqrt{p^2 - \delta}$ durch den Maßpunkt M .

8. σ_p hat genau dann nicht-singuläre Fixpunkte, wenn P auf g liegt, aber im Fall $\delta > 0$ nicht zwischen S_0 und S_1 .

1. Im Fall $\delta \neq 0$ sind es auf K und auf g je zwei nicht-singuläre Fixpunkte. Sie liegen auf g symmetrisch zu \bar{P} im Abstand $\sqrt{p^2 - \delta}$. Auf K sind es die Berührungspunkte der Tangenten von P an K. Die Ursprungsgeraden durch diese Berührungspunkte schneiden g in Punkten, die symmetrisch zu P im Abstand $\sqrt{p^2 - \delta}$ liegen.
2. Im Fall $\delta = 0$ gibt es auf K und auf g je einen nicht-singulären Fixpunkt. Er hat auf g von \bar{P} den gleichen Abstand wie S. Auf K ist er der Berührungspunkt der von g verschiedenen Tangente durch P. Die Ursprungsgeraden durch diesen Berührungspunkt schneiden g in dem Punkt $(d ; 2p)$.

Beweis: Es sei $x(p)$ bzw. $y(p)$ der x-Wert bzw. y-Wertes Punktes $\Pi(p ; 1)$, also

$$x(p) = \frac{d^2 n}{p^2 + d^2 m} \text{ bzw. } y(p) = \frac{-dnp}{p^2 + d^2 m}, \text{ und } x'(p) \text{ bzw. } y'(p) \text{ die Ableitungen nach } p. \text{ Unter}$$

der Voraussetzung $r = \sigma_\delta(p, q)$ ist $pq + qr + rp + \delta = 0$. Damit errechnet man

$$y(p) \cdot (x(q) - d) + y(q) \cdot (d - x(p)) + r \cdot (x(p) - x(q)) = \frac{dn^2(q-p)(pq+qr+rp+\delta)}{(d^2m+p^2)(d^2m+q^2)} = 0, \text{ womit}$$

die Kollinearität von $\Pi(p ; 1)$, $\Pi(q ; 1)$ und $\Pi(r ; 0)$ nachgewiesen ist.

Die Steigung der Geraden durch die Punkte $\Pi(p ; 1)$ und $\Pi(r ; 0)$ ist

$$\frac{y(p) - r}{x(p) - d} = \frac{dnp + r(d^2m + p^2)}{d(p^2 - \delta)} \text{ und die Steigung der Tangente in } \Pi(p ; 1) \text{ ist } \frac{y'(p)}{x'(p)} = \frac{d^2m - p^2}{2dp}.$$

Die beiden Steigungen sind genau dann gleich, wenn $r = \sigma_\delta(p, p)$ gilt.

Damit ergibt sich Satz 4 als direkte Folgerung aus Satz 1.

Wie in Abschnitt 1 kann auch bei den Kubiken von Satz 4 nach Wahl eines Nullpunkts N eine Addition auf der Menge der nicht-singuläre Punkte eingeführt werden: $P + Q$ sei der Punkt R mit $\sigma_p \sigma_N \sigma_Q = \sigma_R$. Wir nehmen als Nullpunkt bei $\delta > 0$ den Schnittpunkt von g mit der x-Achse und für $\delta \leq 0$ den unendlich fernen Punkt auf g. Für nicht-singuläre Punkte $P = \Pi(p, i)$ wird die Abbildung ζ definiert durch $\zeta(P) := (\mu_\delta(p), i)$. Dann ist ζ für $\delta > 0$ bzw. $\delta = 0$ ein Isomorphismus von der additiven Gruppe der nicht-singulären Punkte der Kubik auf das direkte Produkt der multiplikativen bzw. additiven Gruppe der reellen Zahlen und der Gruppe der ganzen Zahlen modulo 2. Für $\delta < 0$ ist ζ ein Isomorphismus auf das direkte Produkt der additiven Gruppe der reellen Zahlen modulo π und der Gruppe der ganzen Zahlen modulo 2.

Die Abbildungen 8 und 9 zeigen den Satz von den drei Spiegelungen für die Kubik aus der Parabel $K : y^2 = 2x$ und der Geraden $g : x = 3$. In Abbildungen 8 wurde P auf K gewählt, so dass $P' = P\sigma_A$, $P'' = P'\sigma_B$, $P''' = P''\sigma_C$ und $P = P'''\sigma_C$ abwechselnd auf g und K liegen.

Dann bildet der Streckenzug $PAZBP''P$ ein Sechseck mit Eckpunkten auf K, bei dem die Diagonalschnittpunkte P', C und D auf g liegen. Dass diese letzten drei Punkte dann kollinear sind, ist die Aussage des Satzes von Pascal. In Abbildung 9 liegt P auf g, was zur Folge hat, dass P''' nicht wie in Abbildung 8 dritter Schnittpunkt der Sekante durch P'' und C mit der Kubik ist, sondern durch Spiegelung von P'' an dem Kreis um \bar{C} entsteht. Die

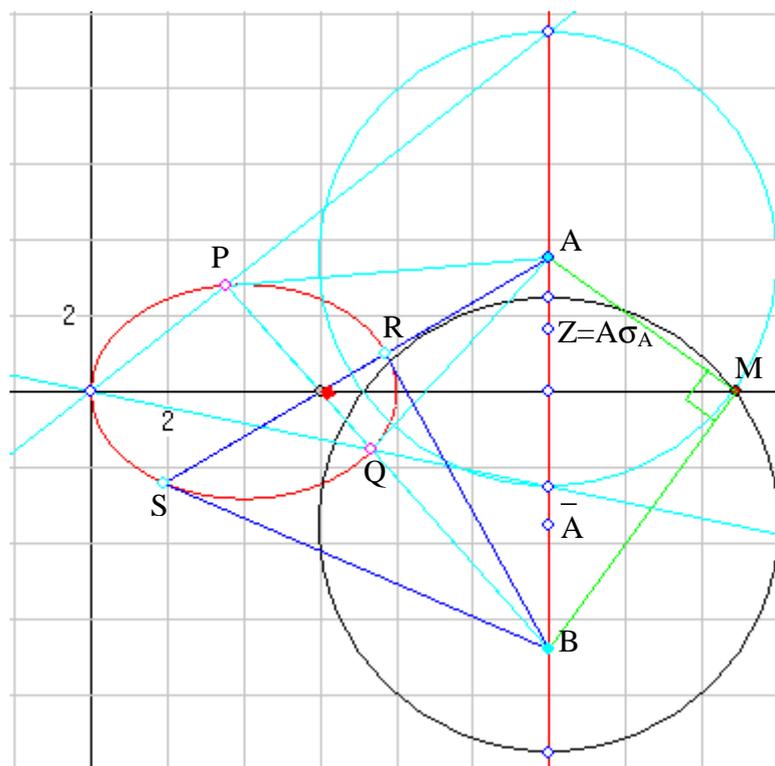


Abb. 11

Die rot gezeichnete Kubik in Abbildung 11 gehört zu der Ellipse $K : y^2 = -0,5x^2 + 4x$ mit der Geraden $g : x = 12$. Da die Tangenten in P und Q durch A gehen, ist die Gerade PQ die Polare von A bezüglich der Ellipse, und es gilt $P\sigma_P = A = Q\sigma_Q$. Da B auf PQ liegt, ist $P\sigma_B\sigma_Q = A$ und darum nach Aussage 3 von Satz 4 $\sigma_P\sigma_Q\sigma_B = \sigma_A$, folglich $\sigma_P\sigma_Q = \sigma_A\sigma_B$. Wegen $Q\sigma_B\sigma_P = A$ folgt analog $\sigma_Q\sigma_P = \sigma_A\sigma_B$. Deshalb ist $\sigma_Q\sigma_P = \sigma_P\sigma_Q = \sigma_A\sigma_B = \sigma_B\sigma_A$. Die entsprechende Überlegung mit R, S statt P, Q zeigt $\sigma_R\sigma_S = \sigma_S\sigma_R = \sigma_A\sigma_B$. Die Geraden PQ und RS sind konjugierte Polaren, und der mit der roten Raute markierte Punkt ist der Pol von g bezüglich der Ellipse. Wegen $Z = A\sigma_A = A\sigma_A\sigma_B\sigma_B = A\sigma_B\sigma_A\sigma_B = B\sigma_A\sigma_A\sigma_B = B\sigma_B$ ist $A\sigma_Z = A$ und $B\sigma_Z = B$, und darum nach Aussage 5.2 von Satz 4 $\vartheta_\delta(B) - \vartheta_\delta(A) = \vartheta_\delta(A) - \vartheta_\delta(B)$, also $2 \cdot (\vartheta_\delta(B) - \vartheta_\delta(A)) = 0 = 180^\circ$, folglich der Winkel AMB ein rechter. \bar{A} und A liegen spiegelbildlich zur x-Achse und Z ergibt sich durch Spiegelung von A an dem Kreis um \bar{A} durch den Maßpunkt $M = (12 + \sqrt{24}; 0)$. Die Ursprungsgeraden durch die Punkte P und Q gehen nach der Aussage 8.1 von Satz 4 durch die Schnittpunkte von g mit dem Kreis um A durch M.

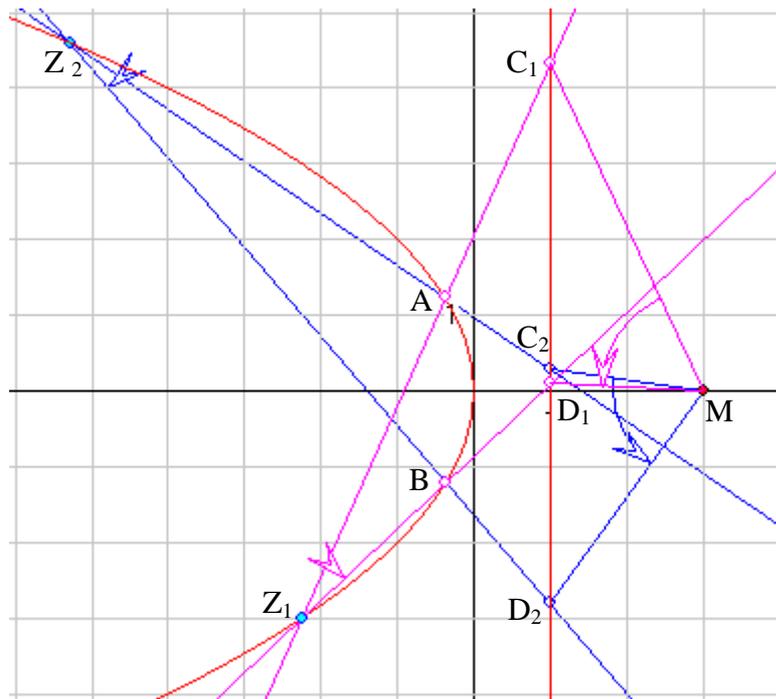


Abb.12

Abbildung 12 soll die geometrische Bedeutung von Aussage 5.2 in Satz 4 an Hand der Kubik aus der Parabel $K: y^2 = -4x$ und der Geraden $g: x = 1$ verdeutlichen. Die Winkel AZ_1B und AZ_2B sind Umfangswinkel der Parabel, die unterschiedlich groß sind. Dagegen sind die markierten Winkel C_1MD_1 und C_2MD_2 bei M gleich groß. Denn $\vartheta_\delta(D_1) - \vartheta_\delta(C_1) = \vartheta_\delta(A) - \vartheta_\delta(B) = \vartheta_\delta(D_2) - \vartheta_\delta(C_2)$. Der euklidische Umfangswinkelsatz für den Kreis kann also auf die Parabel übertragen werden, wenn man die Winkel über die Maßgerade g am Maßpunkt M misst. Dabei sind zwei Geraden $y = m_1 \cdot x + b_1$ und $y = m_2 \cdot x + b_2$ nach dem Höhensatz von Euklid in dieser nicht-euklidischen Winkelmetrik orthogonal, wenn $(m_1 \cdot d + b_1) \cdot (m_2 \cdot d + b_2) = \delta$ gilt. Bei Vorgabe von M , g , einem Winkel bei M und den beiden Punkten A und B erhält man den Kegelschnitt als Spur des Scheitelpunkt Z des zugehörigen Umfangswinkels. Ein entsprechender Peripheriewinkelsatz gilt für alle Kegelschnitte K , wenn man eine K nicht schneidende Gerade g als Maßgerade bestimmt. Auf Grund der Aussage 5.1 in Satz 4 lässt sich eine analoge Überlegung auch für eine schneidende Gerade durchführen. Dann ist der mit dieser Maßgeraden bestimmte Wert $\frac{\vartheta_\delta(A)}{\vartheta_\delta(B)}$ aber keine euklidische Winkelgröße, die man direkt mit dem Geodreieck messen kann, sondern eine im Rahmen der Minkowski-Geometrie.

Abbildung 13 zeigt am Beispiel der Ellipse $y^2 = -0,5x^2 + 4x$, dass der Höhensatz im Dreieck gilt, wenn man die Winkel mit einer nicht schneidenden Maßgeraden misst. Auch andere Sätze der euklidischen Geometrie lassen sich übertragen.

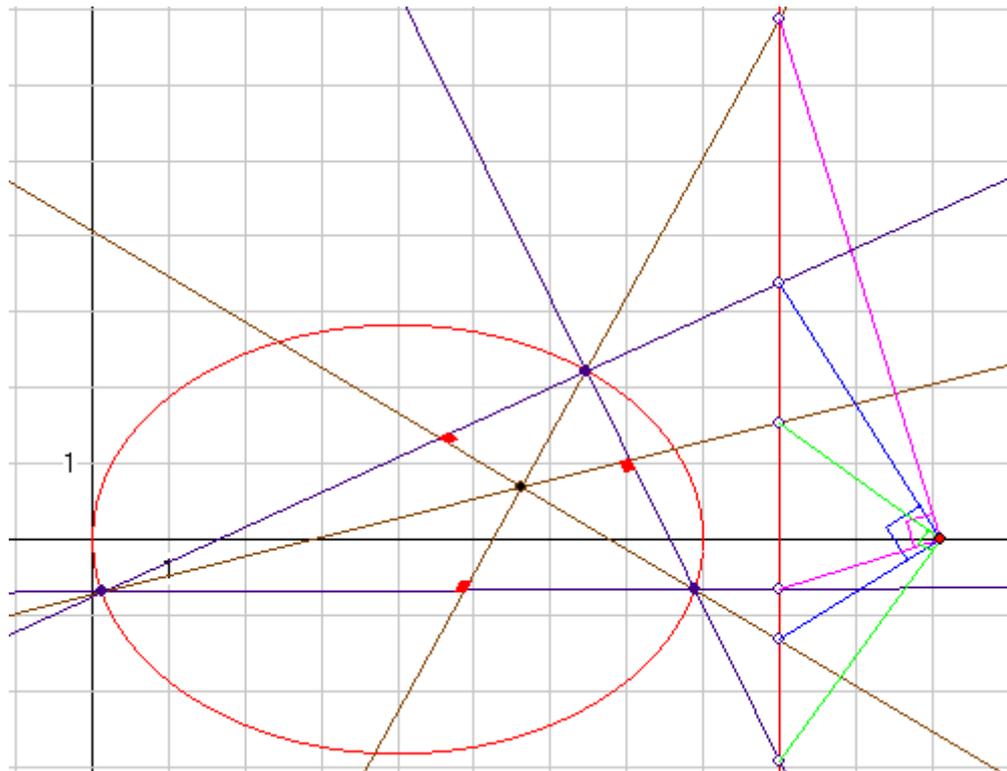


Abb. 13

3. Funktionsgraphen, die kubische Kurven sind :

Wenn $j(x)$ und $k(x)$ teilerfremde ganzrationaler Terme von Grad ≤ 3 bzw. vom Grad ≤ 2 sind mit einem Gleichheitszeichen bei mindesten einem der beiden Terme, dann beschreibt $f(x; y) = k(x) \cdot y - j(x) = 0$ eine Kubik, deren Punkte im Endlichen den Graphen der Funktion $h : x \rightarrow \frac{j(x)}{k(x)}$ bilden. Der Graph wird um den unendlich fernen Punkt auf der y-Achse ergänzt.

Man stellt sich vor, dass dieser Punkt die Kurve bei Polstellen von h im Unendlichen abschließt. Er ist ein isolierter Punkt der Kubik, falls $k(x)$ keine Nullstellen hat. Wenn es zu h eine schiefe oder waagerechte Asymptote gibt, kommt ein unendlich ferner Punkt auf dieser Asymptote hinzu. Der unendlich ferne Punkt auf der y-Achse wird als singulärer Punkt bezeichnet, alle anderen Punkte der Kubik als nicht-singulär.

Durch eine Verschiebung des Koordinatensystems kann man $h(x)$ in einen der folgenden Terme transformieren:

1. $h_0(x) = a_3x^3 + a_1x$ mit $a_3 \neq 0$
2. $h_1(x) = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x} = a_3x^2 + a_2x + a_1 + \frac{a_0}{x}$ mit $a_3 \neq 0$ und $a_0 \neq 0$
3. $h_2(x) = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x^2 - \delta} = a_3x + a_2 + \frac{(a_3\delta + a_1)x + (a_2\delta + a_0)}{x^2 - \delta}$ mit $a_3\delta + a_1 \neq 0$
oder $a_2\delta + a_0 \neq 0$

Als Parameter benutzen wir den x-Wert der Punkte der Kubik. Wenn der unendlich fernen Punkt auf der y-Achse den Graphen von h an den Polstellen ergänzt, wird jede Polstelle als Parameterwert zugeordnet. Im Fall von h_2 und $\delta > 0$ sind dies also zwei Werte für denselben Punkt. Die kubische Kurve durchläuft ihn wie den Kreuzungspunkt einer Schleife in Form des

griechischen Buchstabens α . Der Parameterwert des unendlich fernen Punkts auf einer waagerechten oder schiefen Asymptote sei ∞ , im Fall von $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \pm\infty$ auch der des unendlich fernen Punktes auf der y-Achse. Der zum Parameterwert p gehörige Punkt P sei $\Pi(p)$ genannt.

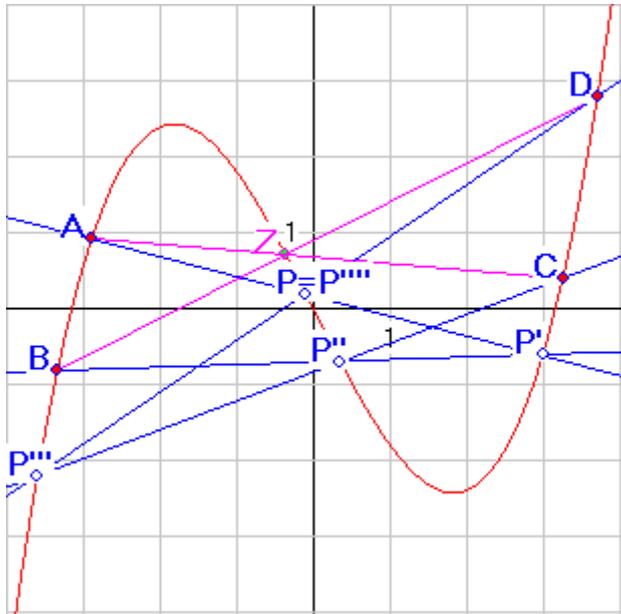


Abb. 14

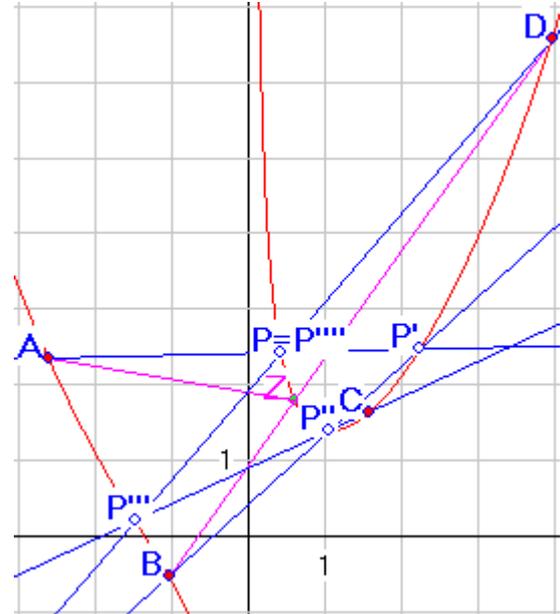


Abb. 15

Die Abbildungen 14 und 15 zeigen den Satz von den drei Spiegelungen für

$h_0(x) = 0,2x^3 - 2x$ und $h_1(x) = 0,4x^2 + \frac{1}{x}$. Beim Sechseck P, A, Z, B, P'', P''', P liegen hier

die Diagonalschnittpunkte nicht wie beim Satz von Pappus-Pascal auf einer Geraden, sondern auf dem Graphen.

Euler-Spiegelungen lassen sich für diese Kurven besonders einfach definieren, da es keine geradlinigen Komponenten gibt und darum jede Sekante durch zwei nicht-singuläre Punkte P und Q der Kubik, die keine Tangente ist, genau einen dritten Schnittpunkt R mit der Kurve hat. Wenn

$y = mx + b$ nämlich eine derartige Sekante beschreibt, ist $h(x) = mx + b$ äquivalent mit der ganzrationalen Gleichung $j(x) - (mx + b) \cdot k(x) = 0$ vom Grad ≤ 3 . Wenn der Grad 3 ist und es nicht nur eine Nullstelle gibt, dann ist $j(x) - (mx + b) \cdot k(x)$ ein Produkt

$c \cdot (x - p) \cdot (x - q) \cdot (x - r) = cx^3 - c(p + q + r)x^2 + c(pq + qr + rp)x - cpqr$ von drei

Linearfaktoren mit einer Konstanten $c \neq 0$. Der Punkt R zum Parameter r sei dann das Bild von Q bei der Euler-Spiegelung σ_p . Wenn der Grad von $j(x) - (mx + b) \cdot k(x)$ gleich 2 ist, gibt es eine waagerechte Asymptote; dann sei der unendlich ferne Punkt dieser Asymptote das Bild $Q\sigma_p$. Wenn die Gerade $y = mx + b$ eine Tangente ist, dann wird $Q\sigma_p$ in entsprechender Weise mit $p = q$ definiert.

Im Spezialfall der ganzrationalen Funktion h_0 ist $p + q + r = 0$, da der Koeffizient von x^2 bei $j(x) - (mx + b) \cdot k(x) = a_3x^3 + (a_1 - m)x - b$ Null ist und außerdem gilt:

$j(x) - (mx + b) \cdot k(x) = a_3 x^3 - a_3(p + q + r)x^2 + a_3(pq + qr + rp)x - a_3 pqr$. Darum ist $Q\sigma_p = \Pi(-p - q)$. Das Produkt dreier Euler-Spiegelungen $\sigma_A \sigma_B \sigma_C$ ist eine Euler-Spiegelung σ_D , denn $P\sigma_A \sigma_B = \Pi(p + a - b)$ und $P\sigma_A \sigma_B \sigma_C = \Pi(-p - a + b - c) = \Pi(-p - d)$ mit $d = a - b + c$. Daraus folgt unmittelbar

Satz 5: Gegeben sei eine ganzrationale Funktion 3. Grades $h_0(x) = a_3 x^3 + a_1 x$. Für Punkte $P = \Pi(p)$ und $Q = \Pi(q)$ sei $Q\sigma_p = \Pi(-p - q)$ das Bild von Q bei der Euler-Spiegelung an P . Es sei $\bar{\vartheta}(P)$ der x -Wert p von P . Dann gelten die ersten drei Aussagen von Satz 4 und außerdem:

4. Die Punkte P, Q und $P\sigma_Q$ sind kollinear. $P\sigma_Q = R$ ist äquivalent mit $\bar{\vartheta}(P) + \bar{\vartheta}(Q) + \bar{\vartheta}(R) = 0$.
5. Sei $C = A\sigma_Z$ und $D = B\sigma_Z$. Dann ist $D = A\sigma_C \sigma_B$ und es gilt: $\bar{\vartheta}(D) - \bar{\vartheta}(C) = \bar{\vartheta}(A) - \bar{\vartheta}(B)$.

Wenn die betrachtete Funktion vom Typ h_1 ist, dann ist $p \cdot q \cdot r = -\frac{a_0}{a_3}$, da das x -freie Glied von $j(x) - (mx + b) \cdot k(x) = a_3 x^3 + (a_2 - m)x^2 + (a_1 - b)x + a_0$ einerseits gleich a_0 ist, andererseits gleich $-a_3 pqr$. Also ist $Q\sigma_p = \Pi\left(\frac{-a_0}{a_3 \cdot p \cdot q}\right)$. Daraus berechnet man den Satz von den drei Spiegelungen entsprechend wie oben.

Satz 6: Gegeben sei eine gebrochen-rationale Funktion $h_1(x) = \frac{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{x}$ mit $a_3 \neq 0$ und $a_0 \neq 0$. Für Punkte $P = \Pi(p)$ und $Q = \Pi(q)$ sei $Q\sigma_p = \Pi\left(\frac{-a_0}{a_3 \cdot p \cdot q}\right)$ das Bild von Q bei der Euler-Spiegelung an P . Es sei $\bar{\vartheta}(P)$ der x -Wert p von P . Dann gelten die ersten drei Aussagen von Satz 4 und außerdem:

4. Die Punkte P, Q und $P\sigma_Q$ sind kollinear. $P\sigma_Q = R$ ist äquivalent mit $\bar{\vartheta}(P) \cdot \bar{\vartheta}(Q) \cdot \bar{\vartheta}(R) = -\frac{a_0}{a_3}$.
5. Sei $C = A\sigma_Z$ und $D = B\sigma_Z$. Dann ist $D = A\sigma_C \sigma_B$ und es gilt: $\frac{\bar{\vartheta}(D)}{\bar{\vartheta}(C)} = \frac{\bar{\vartheta}(A)}{\bar{\vartheta}(B)}$.

Der Fall der Funktion h_2 ist für $a_3 \delta + a_1 = 0$ und $a_2 \delta + a_0 \neq 0$ ähnlich einfach durchzurechnen: Aus $j(x) - (mx + b) \cdot k(x) = (a_3 - m)x^3 + (a_2 - b)x^2 + (a_1 + m\delta)x + a_0 + \delta b$ folgt durch Koeffizientenvergleich mit

$$j(x) - (mx + b) \cdot k(x) = (a_3 - m)(x^3 - (p + q + r)x^2 + (pq + qr + rp)x - pqr), \text{ dass } -a_3 \delta + m\delta = a_1 + m\delta = (a_3 - m)(pq + qr + rp), \text{ also } pq + qr + rp = -\delta \text{ ist.}$$

Dies ist äquivalent mit $r = -\frac{pq + \delta}{p + q} = \sigma_\delta(p, q)$. Mit Satz 1 folgt darum unmittelbar

Satz 7 : Gegeben sei eine gebrochen-rationale Funktion $h_2(x) = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x^2 - \delta}$ mit $a_3\delta + a_1 = 0$ und $a_2\delta + a_0 \neq 0$. Für Punkte $P = \Pi(p)$ und $Q = \Pi(q)$ sei $Q\sigma_P = \Pi(\sigma_\delta(p, q))$ das Bild von Q bei der Euler-Spiegelung an P . Es sei $\vartheta_\delta(P) := \mu_\delta(p)$, wobei p der x -Wert von P ist. P_x sei der Punkt $(p; 0)$ auf der x -Achse und $\overline{P_x}$ der Punkt $(-p; 0)$. Für $\delta \neq 0$ sei $\widetilde{P_x}$ der Punkt $\left(\frac{\delta}{p}; 0\right)$ und $\widehat{P_x}$ der Punkt $\left(-\frac{\delta}{p}; 0\right)$. Für Punkte P_x und Q_x auf der x -Achse sei $Q_x\sigma_{P_x}$ der Punkt $(\sigma_\delta(p, q); 0)$ auf der x -Achse mit dem gleichen x -Wert wie $Q\sigma_P$. Für $\delta > 0$ sei \mathcal{C} der Kreis um $(0; 0)$ mit dem Radius $\sqrt{\delta}$, für $\delta \leq 0$ sei M der Punkt $(0; -\sqrt{-\delta})$. Dann gelten die ersten drei Aussagen von Satz 4 und außerdem:

4. Die Punkte P, Q und $P\sigma_Q$ sind kollinear. $P\sigma_Q = R$ ist äquivalent mit
 1. $\vartheta_\delta(P) \cdot \vartheta_\delta(Q) \cdot \vartheta_\delta(R) = -1$ falls $\delta > 0$
 2. $\vartheta_\delta(P) + \vartheta_\delta(Q) + \vartheta_\delta(R) = 0$ falls $\delta \leq 0$
5. Sei $C = A\sigma_Z$ und $D = B\sigma_Z$. Dann ist $D = A\sigma_C\sigma_B$ und es gilt:
 1. $\frac{\vartheta_\delta(D)}{\vartheta_\delta(C)} = \frac{\vartheta_\delta(A)}{\vartheta_\delta(B)}$ falls $\delta > 0$
 2. $\vartheta_\delta(D) - \vartheta_\delta(C) = \vartheta_\delta(A) - \vartheta_\delta(B)$ falls $\delta \leq 0$
6. $\overline{Q_x\sigma_{P_x}} = \overline{Q_x\sigma_{\overline{P_x}}}$, und falls $\delta \neq 0$ $\widetilde{Q_x\sigma_{\overline{P_x}}} = Q\sigma_P$ für alle nicht-singulären Punkte P, Q .
7. Für nicht-singuläre Punkte Q und $P = \Pi(p)$ der Kubik gilt:
 1. Im Fall $\delta > 0$: Wenn p nicht zwischen $\sqrt{\delta}$ und $-\sqrt{\delta}$ liegt, entsteht $Q_x\sigma_{P_x}$ durch Spiegelung von Q_x an dem Kreis um $\overline{P_x}$ mit dem Radius $\sqrt{p^2 - \delta}$; andernfalls entsteht $Q_x\sigma_{P_x}$ durch Spiegelung von $\widetilde{Q_x}$ an dem Kreis um $\widehat{P_x}$ mit dem Radius $\sqrt{\left(\frac{\delta}{p}\right)^2 - \delta}$. Diese Kreise schneiden den Kreis \mathcal{C} senkrecht.
 2. Im Fall $\delta \leq 0$: $Q_x\sigma_{P_x}$ entsteht durch Spiegelung von Q_x an dem Kreis um $\overline{P_x}$ mit dem Radius $\sqrt{p^2 - \delta}$ durch M .
8. σ_P hat genau dann Fixpunkte, wenn $\delta \leq 0$ ist oder im Fall $\delta > 0$ p nicht zwischen $\sqrt{\delta}$ und $-\sqrt{\delta}$ liegt.
 1. Im Fall $\delta \neq 0$ sind es zwei Fixpunkte. Sie liegen symmetrisch zu $\overline{P_x}$ im Abstand $\sqrt{p^2 - \delta}$.
 2. Im Fall $\delta = 0$ gibt es einen Fixpunkt. Er hat von $\overline{P_x}$ den gleichen Abstand wie der Punkt $(0; 0)$.

Abbildung 17 zeigt das Analogon des Umfangwinkelsatzes, das sich aus 5.2 von Satz 7 ergibt.

Im Fall $a_3\delta + a_1 \neq 0$ sei $\omega := -\frac{a_2\delta + a_0}{a_3\delta + a_1}$. ω ist dann die Schnittstelle der schiefen oder waagerechten Asymptote mit dem Graphen der Funktion. Es seien p, q und r paarweise verschiedene Schnittstellen einer Geraden mit dem Graphen. Dann ist $\frac{f(r) - f(p)}{r - p} = \frac{f(p) - f(q)}{p - q}$.

Es folgt $r = \frac{-\frac{pq + \delta}{p + q} \cdot \omega + \delta}{-\frac{pq + \delta}{p + q} + \omega} = \frac{\sigma_\delta(p, q) \cdot \omega + \delta}{\sigma_\delta(p, q) + \omega} = -\sigma_\delta(\omega, \sigma_\delta(p, q))$. Diese Gleichung gilt auch,

wenn p und q zusammenfallen und die Gerade eine Tangente ist.

Satz 8 : Gegeben sei eine gebrochen-rationale Funktion $h_2(x) = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x^2 - \delta}$ mit

$a_3\delta + a_1 \neq 0$. Sei $\omega := -\frac{a_2\delta + a_0}{a_3\delta + a_1}$ und W der Punkt $(\omega; h_2(\omega))$. Für Punkte $P = \Pi(p)$ und $Q =$

$\Pi(q)$ sei $Q\sigma_P = \Pi(-\sigma_\delta(\omega, \sigma_\delta(p, q)))$ das Bild von Q bei der Euler-Spiegelung an P . Es sei $\vartheta_\delta(P) := \mu_\delta(p)$, wobei p der x -Wert von P ist.

Dann gelten die ersten drei Aussagen von Satz 4 und außerdem:

4. Die Punkte P, Q und $P\sigma_Q$ sind kollinear. $P\sigma_Q = R$ ist äquivalent mit

1. $\vartheta_\delta(P) \cdot \vartheta_\delta(Q) \cdot \vartheta_\delta(R) = \vartheta_\delta(W)$ falls $\delta > 0$
2. $\vartheta_\delta(P) + \vartheta_\delta(Q) + \vartheta_\delta(R) = \vartheta_\delta(W)$ falls $\delta \leq 0$

5. Sei $C = A\sigma_Z$ und $D = B\sigma_Z$. Dann ist $D = A\sigma_C\sigma_B$ und es gilt:

1. $\frac{\vartheta_\delta(D)}{\vartheta_\delta(C)} = \frac{\vartheta_\delta(A)}{\vartheta_\delta(B)}$ falls $\delta > 0$
2. $\vartheta_\delta(D) - \vartheta_\delta(C) = \vartheta_\delta(A) - \vartheta_\delta(B)$ falls $\delta \leq 0$

Beweis: $r = -\sigma_\delta(\omega, \sigma_\delta(p, q))$ ist äquivalent mit $pqr - \omega \cdot (pq + qr + rp) + \delta \cdot (p + q + r) - \delta\omega = 0$.

Wegen der Symmetrie des Term auf der linken Seite dieser Gleichung ist die Aussage 1 in Satz 4 erfüllt.

Die Abbildung $t \rightarrow -\sigma_\delta(\omega, t)$ sei mit τ bezeichnet. Dann gilt für die

Umkehrfunktion $\tau^{-1}(q) = \sigma_\delta(\omega, -q)$. Man errechnet

$$\tau(\sigma_{\delta,p}(q)) = -\sigma_\delta(\omega, \sigma_\delta(p, q)) = \frac{-\frac{pq + \delta}{p + q} \cdot \omega + \delta}{-\frac{pq + \delta}{p + q} + \omega} = -\frac{-\frac{\omega q + \delta}{\omega - q} \cdot p + \delta}{-\frac{\omega q + \delta}{\omega - q} + p} = \sigma_{\delta,p}(\tau^{-1}(q)).$$

Wegen $\sigma_{\delta,p}(\tau^{-1}(\tau(\sigma_{\delta,p}(q)))) = q$ ist die Aussage 2 in Satz 4 erfüllt, und auch die Aussage 3,

denn nach Satz 1 ist $\tau(\sigma_{\delta,c}(\sigma_{\delta,b}(\tau^{-1}(\tau(\sigma_{\delta,a}(q))))) = \tau(\sigma_{\delta,c}(\sigma_{\delta,b}(\sigma_{\delta,a}(q)))) = \tau(\sigma_{\delta,d}(q))$ mit

$$d = \frac{abc - \delta(a - b + c)}{ab + bc - ca - \delta} = \sigma_{\delta,b}((\sigma_{\delta,c}(a))) = \sigma_{\delta,b}(\tau^{-1}(\tau(\sigma_{\delta,c}(a)))).$$

Zu 4.: Zum Nachweis der Kollinearität bei $P\sigma_Q = R$ reicht es, zu zeigen, dass aus

$$r = -\sigma_\delta(\omega, \sigma_\delta(p, q)) \text{ folgt: } h_2(p) \cdot (q - r) + h_2(q) \cdot (r - p) + h_2(r) \cdot (p - q) = 0.$$

$h_2(x) = a_3x + a_2 + (a_3\delta + a_1) \frac{x - \omega}{x^2 - \delta}$. Wegen

$(a_3p + a_1) \cdot (q - r) + (a_3q + a_1) \cdot (r - p) + (a_3r + a_1) \cdot (p - q) = 0$ muss nur

$\frac{p - \omega}{p^2 - \delta} \cdot (q - r) + \frac{q - \omega}{q^2 - \delta} \cdot (r - p) + \frac{r - \omega}{r^2 - \delta} \cdot (p - q) = 0$ nachgewiesen werden. Die Multiplikation

mit dem Hauptnenner und anschließende Faktorisierung zeigt, dass dies äquivalent ist mit $(p - q) \cdot (q - r) \cdot (r - p) \cdot (pqr - \omega \cdot (pq + qr + rp)) + \delta \cdot (p + q + r) - \delta\omega = 0$

Für $\delta > 0$ ist $\vartheta_\delta(P) = \mu_\delta(p) = \frac{\sqrt{\delta} - p}{\sqrt{\delta} + p}$. Dann ist

$$\begin{aligned} & (\vartheta_\delta(P) \cdot \vartheta_\delta(Q) \cdot \vartheta_\delta(R) - \vartheta_\delta(W)) \cdot (\sqrt{\delta} + p)(\sqrt{\delta} + q)(\sqrt{\delta} + r)(\sqrt{\delta} + \omega) \\ &= (\sqrt{\delta} - p)(\sqrt{\delta} - q)(\sqrt{\delta} - r)(\sqrt{\delta} + \omega) - (\sqrt{\delta} + p)(\sqrt{\delta} + q)(\sqrt{\delta} + r)(\sqrt{\delta} - \omega) \\ &= -2\sqrt{\delta} \cdot (pqr - \omega \cdot (pq + qr + rp)) + \delta \cdot (p + q + r) - \delta\omega = 0. \end{aligned}$$

Für $\delta = 0$ ist $\vartheta_\delta(P) = \mu_0(p) = \frac{1}{p}$. Also ist

$$\vartheta_\delta(P) + \vartheta_\delta(Q) + \vartheta_\delta(R) - \vartheta_\delta(W) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{pqr\omega} \cdot (qr\omega + pr\omega + pq\omega - pqr) = 0.$$

Für $\delta < 0$ ist $\vartheta_\delta(P) = \mu_\delta(p) = \operatorname{arc\,cot} \left(\frac{p}{\sqrt{-\delta}} \right)$. Es folgt mit dem Additionstheorem

$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot(\alpha) \cdot \cot(\beta) \mp 1}{\cot(\beta) \pm \cot(\alpha)}$ für die Kotangens-Funktion

$$\cot(\vartheta_\delta(P) + \vartheta_\delta(Q)) = \frac{\frac{p}{\sqrt{-\delta}} \cdot \frac{q}{\sqrt{-\delta}} - 1}{\frac{p}{\sqrt{-\delta}} + \frac{q}{\sqrt{-\delta}}} = \frac{pq + \delta}{p + q} = -\sigma_\delta(p, q) \text{ und analog}$$

$\cot(\vartheta_\delta(W) - \vartheta_\delta(R)) = -\sigma_\delta(\omega, -r)$. Da aus $r = -\sigma_{\delta, \omega}(\sigma_\delta(p, q))$ auch $\sigma_{\delta, \omega}(-r) = \sigma_\delta(p, q)$ folgt, ist $\cot(\vartheta_\delta(P) + \vartheta_\delta(Q)) = \cot(\vartheta_\delta(W) - \vartheta_\delta(R))$ und darum $\vartheta_\delta(P) + \vartheta_\delta(Q) + \vartheta_\delta(R) = \vartheta_\delta(W)$.

Die 5. Aussage folgt unmittelbar aus der 4..

Die Gültigkeit des Satzes von den drei Spiegelungen ermöglicht es auch für Kubiken in den Sätzen 7 und 8 eine Addition auf der Menge der nicht-singulären Punkte einzuführen. Für $\delta > 0$ sei N der Punkt $(0; h_2(0))$ und für $\delta \leq 0$ der unendlich ferne Punkt auf der schiefen oder waagerechten Asymptote. Dann sei auch hier $P + Q$ der Punkt R mit $\sigma_P \sigma_N \sigma_Q = \sigma_R$, also mit $R = P \sigma_Q \sigma_N$. Dann ist ϑ_δ für $\delta > 0$ bzw. $\delta = 0$ ein Isomorphismus von der additiven Gruppe der nicht-singulären Punkte der Kubik auf die multiplikativen bzw. additiven Gruppe der reellen Zahlen. Für $\delta < 0$ ist ϑ_δ ein Isomorphismus auf die additiven Gruppe der reellen Zahlen modulo π .

Abbildung 18 zeigt die zu $h_2(x) = \frac{x^3 + 20}{x^2 + 4}$ gehörige Kubik. Wie in Abbildung 11 sind

konjugierte Polaren PQ und RS eingezeichnet, es gilt also $P\sigma_P = A = Q\sigma_Q$ und

$R\sigma_R = B = S\sigma_S$. Am Maßpunkt $M(0; -2)$ wird der geometrische Zusammenhang auch hier

durch rechte Winkel ausgedrückt. Die Maßgerade ist die x -Achse. Sie ist im Unterschied zur

